

2.2 基底解, 実行可能解, 実行可能基底解

線形計画問題の制約条件の連立 1 次方程式 $Ax = b$ において, 行基本変形によって, $m \times n$ 行列 A をガウス行列に変形したときの初 1 の個数を A の **階数 (ランク)** といい, $\text{rank} A$ と表した. 今後, $\text{rank} A = m$ かつ $m < n$ と仮定する. このとき, 行列 A の n 個の列ベクトルのなかから 1 次独立なものを m 個選び出せることに注意する.

線形計画問題の標準形, スラック変数

1 次形式 (線形) の目的関数を最小化する線形計画問題で, 制約条件に不等式を含む場合は, 非負変数 (**スラック変数** (slack variable) という) を追加して, 標準形 (2.1) の制約条件の形に変形できる. また, 非負条件がない変数があった場合には, 新たに 2 つの非負変数の差として表せば標準形に直すことが可能である.

○例 2.1. 例 1.17 の (1) で取り上げた連立 1 次不等式を連立 1 次方程式に変形してみよう. それぞれの不等式にスラック変数 x_3, x_4 を挿入して, 同値な等式に変形できる.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

○例 2.2. 例 2.1 において, x_1 に非負条件がない場合を考えてみる. スラック変数 x_3, x_4 を挿入すると同時に, $y \geq 0$ と $z \geq 0$ を用意して, $x_1 = y - z$ と分解して表し, もとの式のなかで x_1 のところをすべて $y - z$ に置き換えれば, すべての変数に非負条件が付いた連立 1 次方程式に変形できる.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - z + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2y - 2z + x_2 + x_4 = 6 \\ y \geq 0, z \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

考え方：線形計画問題の標準形への変形手順

どのような形の線形計画問題でも，次の手順により標準形へ変形することができる．つまり，すべての変数に非負条件が付いていて，連立1次方程式で制約式が表され，目的関数を最小化する問題に変形できる．

- (1) 非負条件の付いていない変数があった場合は，例 2.2 のように新たに2つの非負変数の差として表す．
- (2) 不等式制約があった場合には，スラック変数を使って，等号に直す．つまり，「左辺 $\leq$ 右辺」ならば左辺に非負のスラック変数を加え，逆に，「左辺 $\geq$ 右辺」ならば左辺から非負のスラック変数を引く．
- (3) 最大化問題の場合は， (-1) を「Maximize $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ 」の外へ出して，「 (-1) Minimize $-\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ 」というように最小化問題へ直す．

○例 2.3. 次の線形計画問題 (P1) を標準形 (P2) に直してみる．変数 x_2 と x_3 には非負条件が付いていないので， x_2 を $y_1 - z_1$ で， x_3 を $y_2 - z_2$ で置き換える．また，不等式の部分にはそれぞれスラック変数 x_4 と x_5 を挿入する．さらに，最大化問題になっているので，目的関数を (-1) 倍して，最小化問題にしておく．

$$(P1) \begin{cases} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_2 - x_3 \geq 20 \\ & x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P2) \begin{cases} (-1) \text{Min} & -x_1 - y_1 + z_1 \\ \text{s.t.} & x_1 + y_1 - z_1 + x_4 = 10 \\ & y_1 - z_1 - y_2 + z_2 - x_5 = 20 \\ & x_1 \geq 0, y_1 \geq 0, z_1 \geq 0, y_2 \geq 0, z_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

ここで，変数の文字を x にそろえて番号を付け替えれば，以下のように見やすくなる．

$$(P2) \begin{cases} (-1) \text{Min} & -x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 10 \\ & x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_7 = 20 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

以下, いくつか用語の定義をする.

線形計画問題の実行可能集合, 実行可能解

$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ を**実行可能集合** (feasible set) または**実行可能領域** (feasible domain) といい, その要素 $x \in S$ を**実行可能解** (feasible solution) という.

基底変数, 非基底変数, 基底行列, 非基底行列

連立 1 次方程式 $Ax = b$ の係数行列 A について, n 個の列ベクトルのなかから m 個の 1 次独立なものを一組選んだとき, それらを並べてつくる $(m \times m)$ の行列を**基底行列** (basic matrix) といい, これを B で表し, それに対応する変数を**基底変数** (basic variable) とよぼう. 他方, 残りの変数を**非基底変数** (nonbasic variable) とよぶことにし, それらに対応する列ベクトルを並べた行列を**非基底行列** (nonbasic matrix) といって N で表そう.

このとき, 基底変数からなるベクトルを x_B , 非基底変数からなるベクトルを x_N とおけば, 変数の順序を適当に並び替えると係数行列 A と変数ベクトル x は次のように分割表示できる.

$$A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

よって, 連立 1 次方程式 $Ax = b$ も

$$Bx_B + Nx_N = b \quad (2.6)$$

のように表せる.

線形計画問題の基底解, 実行可能基底解

連立 1 次方程式 $Ax = b$ が (2.6) のように分割表示されている場合, 基底行列 B は正則で逆行列 B^{-1} をもち, $b \in \mathbb{R}^m$ は基底行列 B の列ベクトルの 1 次結合で表すことができる. つまり, 非基底変数をすべて零 ($x_N = 0$) とすることで, $x_B = B^{-1}b$ と一意に決定される. こうして定まる

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

を連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の**基底解** (basic solution) という。また、この $\mathbf{x}$ が非負条件 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ をみたす (つまり、 $B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$) ならば、**実行可能基底解** (basic feasible solution) という。

○例 2.4. 例 2.1 の連立1次方程式 (2.3) を、1.4 節で考えたように、行列と列ベクトルの積の形で表してから、列ベクトル分解して表してみよう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\iff x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

このとき、係数行列のどの2つの列ベクトルも1次独立になっているので、 $\mathbb{R}^2$ の基底として6通りの組合せがある。

そのなかで、まず、第1列と第2列の列ベクトルを選んでみると、以下のように (2.5) および (2.6) に対応する分割表示の形に変形できる。

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ここで、非基底変数の値を0 ($x_3 = x_4 = 0$) とすると、例 1.25 で求めたように逆行列を計算し、次のように基底変数の値が求まる。

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

このとき、対応する基底行列、非基底行列、基底変数とその値、非基底変数とその値は

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

となり, $\mathbf{x} = (2, 2, 0, 0)^T$ は基底解となる. この場合, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ なので, これは1つの実行可能基底解となる.

次に, 係数行列の第2列と第3列の列ベクトルを選んでみると

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{1} & 0 \\ 2 & \boxed{1} & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \boxed{x_2} \\ \boxed{x_3} \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_2} \\ \boxed{x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

ここで, 非基底変数の値を0 ($x_1 = x_4 = 0$) とすると, 次のように基底変数の値が求まる.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_2} \\ \boxed{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \boxed{x_2} \\ \boxed{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

このとき, 対応する基底行列, 非基底行列, 基底変数とその値, 非基底変数とその値は

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

となり, $\mathbf{x} = (0, 6, -6, 0)^T$ は基底解となる. しかし, $x_3 = -6$ なので, $\mathbf{x} = (0, 6, -6, 0)^T$ は実行可能基底解ではない. $\square$

◆**演習 2.1.** 例 2.1 の非負条件付きの連立1次方程式 (2.3) において, 例 2.4 で求めた基底行列とそれに対応する基底解以外の残りの組合せを求めよ. また, 実行可能解が $\mathbf{x}_1 = (2, 2, 0, 0)^T$, $\mathbf{x}_2 = (3, 0, 3, 0)^T$, $\mathbf{x}_3 = (0, 3, 0, 3)^T$, $\mathbf{x}_4 = (0, 0, 6, 6)^T$ の4通りとなることを示せ.

上の例 2.4 では, 基底行列と基底解の組合せは6通りもあり, すべてを求めることが大変であった. しかし, 1.4 節の考察に基づくと以下のような列挙方法がある.

考え方：線形計画問題の実行可能集合の解釈

実行可能解は $Ax = b$ と $x \geq 0$ をみたす点 x なので、基底行列 B の列ベクトルを $a_1, \dots, a_m$ とすると、1.4 節で考えた (1.17) から、実行可能解が存在するための必要十分条件は

$$b \in \text{cc}\{a_1, \dots, a_m\} \quad (2.12)$$

である。これは、 $B^{-1}b \geq 0$ と同値であることもわかる。よって、 A の列ベクトルのなかで基底行列となりうる組合せをすべて列挙できれば、これらの条件がみたされているかどうかを確認することで、実行可能解をすべて求めることができる。

特に、係数行列 A が 2 行からなる場合は、2 次元座標平面にすべての列ベクトルを描いて、右辺のベクトル b を挟むような 2 つの列ベクトルの組合せ（つまり、その 2 つのベクトルから生成される凸錐が b を含んでいる場合）を考えることで、基底行列をすべて列挙できる。

○例 2.5. 例 2.1 の連立 1 次方程式 (2.3) の係数行列の列ベクトルを

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すと、 $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ が a_1, a_2, a_3, a_4 のうちの 2 つで非負 1 次結合として表せる場合は、図 2.2 で b を挟むような 2 つのベクトルの組合せを考えればよい。それは、 $(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4)$ の 4 通りである。よって、連立 1 次

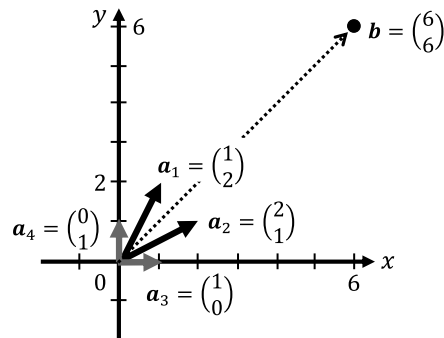


図 2.2 例 2.5 の列ベクトル a_1, a_2, a_3, a_4 とベクトル b の位置関係

方程式 (2.3) の基底行列として, 以下の 4 通りが考えられる.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

次に, 線形計画問題 (2.1) の実行可能集合が例 1.17 で取り上げた (1) の不等式領域のような凸多面体であるときに最適解が容易に求まることを述べる. なお, 線形計画問題 (2.1) の実行可能基底解は, 後述する定理 2.2 からわかるように実行可能集合の端点となり, 幾何学的には実行可能集合を表す図形の頂点に対応している.

定理 2.1: 凸多面体上の線形計画問題の最適解

線形計画問題 (2.1) において, その実行可能集合 S が $e_1, \dots, e_k$ によって生成される凸包であるとき, つまり,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 (i = 1, \dots, k) \right\} \quad (2.13)$$

と表されている場合, 最適値は

$$c^T e_{i_0} = \min \{ c^T e_1, \dots, c^T e_k \}$$

となり, 最適解は e_{i_0} である.

証明. 実行可能集合 S の任意のベクトル x は制約条件 $Ax = b$ と $x \geq 0$ をみたすので, S の要素である $e_1, \dots, e_k$ についても

$$Ae_i = b, \quad e_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, k)$$

が成立する. また, $\lambda_i \geq 0 (i = 1, \dots, k)$ で $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ なので, S の任意のベクトル x における目的関数の値は

$$c^T x = c^T \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T e_i \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\min_{i=1, \dots, k} c^T e_i \right)$$

となり, $e_1, \dots, e_k$ のなかで目的関数の値が一番小さくなる点を e_{i_0} とすれば, つまり,

$$\min \{ c^T e_1, \dots, c^T e_k \} = c^T e_{i_0}$$

とすると, $c^T x \geq c^T e_{i_0}$ となる. よって, (2.1) の最適解は e_{i_0} となり, 最適値は $c^T e_{i_0}$ となる. □

したがって、実行可能集合が凸多面体の場合、その端点がすべて求められれば、それらの点の目的関数値を比較することで、最適解と最適値が容易に求められる。

○例 2.6. 本章の初めに考えた表 2.1 を線形計画問題として表すと、以下のようになる。

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

この制約条件は、例 1.17 で取り上げた図 1.7 の凸多面体 (多角形) を表していて、例 2.1 で考えたように、次の等式制約に同値変形できる。

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

このとき、演習 2.1 にあるように、 $(\mathbf{P})$ の実行可能基底解は $\mathbf{x}_1 = (2, 2, 0, 0)^T$, $\mathbf{x}_2 = (3, 0, 3, 0)^T$, $\mathbf{x}_3 = (0, 3, 0, 3)^T$, $\mathbf{x}_4 = (0, 0, 6, 6)^T$ で、22 ページの図 1.7 の多角形の頂点に対応している。そこで、目的関数を $f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ と表すと、

$$f(\mathbf{x}_1) = 4, f(\mathbf{x}_2) = 3, f(\mathbf{x}_3) = 3, f(\mathbf{x}_4) = 0$$

となる。よって、定理 2.1 の結果を適用すれば、最適解は $\mathbf{x}_1 = (2, 2, 0, 0)^T$ で、最適値は 4 となる。□

◆演習 2.2. 例 2.6 の線形計画問題の目的関数を $x_1 + 4x_2$ にとり替えて、実行可能集合の端点の関数値を比較して、最適解と最適値を求めよ。

2.2 節の問題

[1] 次の線形計画問題について、各問いに答えよ。

$$(\mathbf{LP}) \begin{cases} \text{Min} & 3x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(1) いくつかスラック変数を挿入して、問題 $(\mathbf{LP})$ を標準形に直せ。